LINEARE ALGEBRA

Gleichungssysteme

Gauß-Algorithmus

Datei Nr. 62011

Stand 17.03.2008

Demo: Mathe-CD

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Das Lösen von Gleichungssystemen durch Elimination von Variablen kann man auf ein einfaches Schema bringen, das den Vorteil hat übersichtlich zu sein und dazu noch durch eine abkürzende Schreibweise mit Matrizen handlich zu sein .

Dieses Verfahren geht auf Carl Friedrich Gauß zurück, der von 1777 bis 1855 lebte und Mathematiker und Astronom war.

Demo: Mathe-CD

Inhalt

§ 1	Drei Gleichungen mit drei Unbekannten 13 ausführliche Beispiele	2
§ 2	Drei Gleichungen mit vier Unbekannten 6 ausführliche Beispiele	13
§ 3	Vier Gleichungen mit vier Unbekannten 10 ausführliche Beispiele	18
§ 4	Vier Gleichungen mit drei Unbekannten 3 ausführliche Beispiele	29

In der nächsten Datei werden Gleichungssysteme mit Parametern untersucht.

Beispiel 11

$$\left\{\begin{array}{l} 3x_1+4x_2-2x_3=19 \\ 2x_1+2x_2+5x_3=-2 \\ 6x_1+\ x_2-\ \ x_3=11 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -2 & 19 \\ 2 & 2 & 5 & -2 \\ 6 & 1 & -1 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} -4\cdot Z3 \\ -2\cdot Z3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -21 & 0 & 2 & -25 \\ -10 & 0 & 7 & -24 \\ 6 & 1 & -1 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2\cdot Z2 \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -12 & 23 \\ -10 & 0 & 7 & -24 \\ 6 & 1 & -1 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -10\cdot Z1 \\ +6\cdot Z1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -12 & 23 \\ 0 & 0 & 127 & -254 \\ 0 & 1 & -73 & 149 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ :127 \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & -12 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -73 & 149 \end{array}\right) \begin{array}{l} +12\cdot Z2 \\ \\ +73\cdot Z2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Umordnen führt auf $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow L = \{(1|3|-2)\}$

Beispiel 12

$$\left\{\begin{array}{l} 4x_1+3x_2+\ \ x_3=3 \\ -2x_1+\ \ x_2+3x_3=4 \\ \qquad 5x_2+7x_3=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2\cdot Z2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 7 & 11 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -Z1 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 7 & 11 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

Die letzte Zeile gehört zur Gleichung 0 = -10 und stellt einen Widerspruch dar. Das System ist unlösbar: $L = \{\ \}$.

Demo: Mathe-CD